Optimisation convexe et combinatoire
DM2

1 décembre 2016

Exercice 1 b-matching

Problème 1. *b-matching*
Pour un graphe G et des valeurs b_v pour chaque $v \in V(G)$, trouver un sous-ensemble M d'arêtes de G tel que chaque sommet v est adjacent à b_v arêtes de M ou dire si un tel sous-ensemble n'existe pas.

1. Montrer que tout graphe complet de $2n$ sommets tel que $b_v = n$ pour chaque sommet admet un b-matching.
2. Donner un algorithme polynomial pour le problème b-matching.

Exercice 2 Polytopes entiers et matrices unimodulaires

Le but de cet exercice est de s'intéresser aux liens entre polytopes entiers et matrices (totalement) unimodulaires. On rappelle d'abord quelques définitions et théorèmes relatifs aux polytopes.

Définition 1. *Face de polytope*
Soit $P = \{x : Ax \leq b\}$, on appelle $F \subseteq P$ une face de P l'ensemble des points de P qui satisfait avec égalité un sous-ensemble fixe des inégalités.
Par exemple $F = \{x : A_1 x = b_1$ et $2 \leq i \leq k, A_i x \leq b_i\}$ est une face de P.

Définition 2. *Polytope entier*
Un polytope P est dit entier si toute face non vide de P contient un point entier.

Définition 3. *Point extrême et polytope pointé*
Un point $\bar{x} \in P$ est appelé point extrême de P si $\bar{x} = \lambda x + (1-\lambda)y$ pour deux points de P : x et y et $0 < \lambda < 1$ implique $x = y = \bar{x}$.
Un polytope P est dit pointé s'il contient au moins un point extrême.

Définition 4. *Enveloppe convexe d'un ensemble*
Soit S un ensemble, on note $conv(S)$ le plus petit ensemble convexe contenant S.

Théorème 1. *Polytope entier et définitions équivalentes*
Soit P un polytope rationnel pointé, les propositions suivantes sont équivalentes :
i : P est un polytope entier,
ii : le problème PL : $\max\{c^\top x : x \in P\}$ a une solution entière optimale pour tout $c \in \mathbb{Q}^n$,
iii : le problème PL : $\max\{c^\top x : x \in P\}$ a une solution entière optimale pour tout $c \in \mathbb{Z}^n$,
iv : la valeur $z^{PL} = \max\{c^\top x : x \in P\}$ est entière pour tout $c \in \mathbb{Z}^n$,
v : $P = conv(P \cap \mathbb{Z}^n)$.

Théorème 2. *Polytope et dimension de faces*
Soit P un polytope rationnel, toutes les faces minimales de P ont la même dimension : $n - rang(A)$.

Pour l'exercice on admet les théorèmes 1 et 2.

1. Montrer que la solution optimale du problème PL $\max\{c^\top x : x \in P\}$ est une face de P.

   Théorème 3. *Soit $P = \{x : Ax \leq b\}$ un polytope rationnel non vide où $rang(A) = n$, P est entier si et seulement si tous ses points extrêmes sont entiers.*

2. Prouver le théorème précédent.

   Corollaire 4. *Soit $P \subseteq \mathbb{R}^n_+$ un polytope rationnel non vide, P est entier si et seulement si tous ses points extrêmes sont entiers.*

3. Prouver le corollaire précédent.

   On s'intéresse dès lors aux matrices (totalement) unimodulaires :

   Définition 5. *Matrices unimodulaires et totalement unimodulaires*
   Soit $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ de rang m, la matrice A est unimodulaire si toutes ses entrées sont entières et chaque sous-matrice de taille $m \times m$ non singulière a pour déterminant -1 ou 1. La matrice A est totalement unimodulaire si toute sous-matrice quarrée a pour déterminant -1, 0 ou 1.

   Théorème 5. *Matrices totalement unimodulaires et équivalences*
   Soit $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, les propositions suivantes sont équivalentes :
   i : A est totalement unimodulaire,
   ii : $A^\top$ est totalement unimodulaire,
   iii : (A, I) est unimodulaire,
   iv : $\begin{pmatrix} A \\ -A \\ I \\ -I \end{pmatrix}$ est totalement unimodulaire.

4. Prouver le théorème précédent.

   On montre qu'un PL avec une matrice unimodulaire a toujours une solution entière optimale (sous garantie que la solution soit bornée).

   Théorème 6. *Polytope et matrice unimodulaire*
   Soit $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ de rang m, le polytope $P = \{x \in \mathbb{Q}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ est entier pour tout $b \in \mathbb{Z}^m$ si et seulement si A est unimodulaire.

5. Prouver le théorème précédent.

   Théorème 7. *Polytope et matrice totalement unimodulaire (Hoffman et Kruskal)*
   Soit $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, le polytope $P = \{x \in \mathbb{Q}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$ est entier pour tout $b \in \mathbb{Z}^m$ si et seulement si A est totalement unimodulaire.

6. Prouver le théorème précédent.

   Les matrices totalement unimodulaires apparaissent souvent dans les problèmes d'optimisation combinatoire, par exemple toutes les *network matrices* sont totalement unimodulaires.

   Définition 6. *Matrice d'incidence*
   Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté, on définit sa matrice d'incidence M de $|E|$ lignes et $|V|$ arêtes telle que $M_e, v = 1$ si e est incident à v et 0 sinon.
   Pour un graphe orienté $M_e, v = 1$ si e entre en v et -1 si e part de v.

7. Montrer que la matrice d'incidence d'un graphe G non orienté est totalement unimodulaire si et seulement si G est bipartie.
8. Montrer que la matrice d'incidence d'un graphe G orienté est totalement unimodulaire.