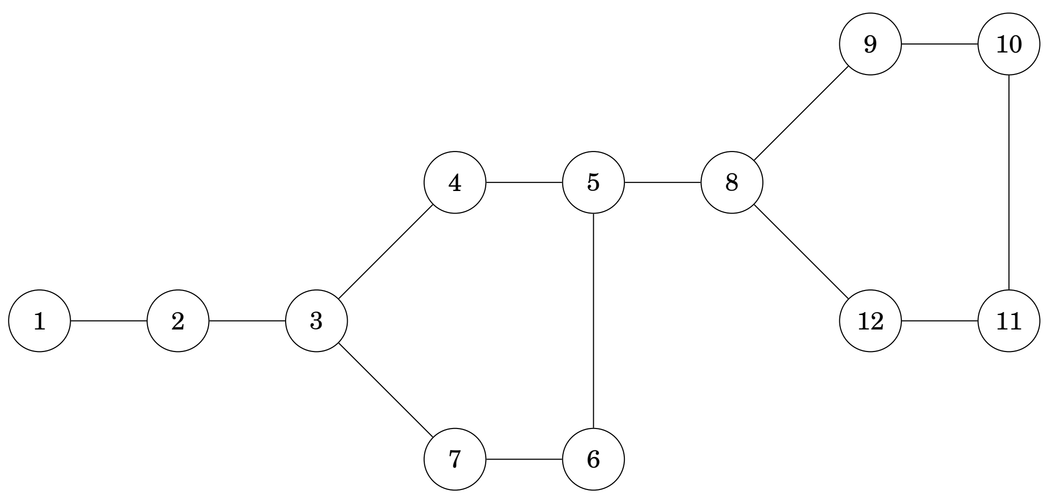
Optimisation convexe et combinatoire
TD 1

10 novembre 2016

Exercise 1 Application algorithme d'Edmonds pour les couplages



1. Appliquer l'algorithme d'Edmonds au graphe ci dessus.

Exercise 2 Théorème de Gallai

Soit $G = (V, E)$ un graphe. un ensemble stable est un sous ensemble C de V tel que $e \not\subseteq C$ pour toute arete e de G. Une couverture par sommet est un sous-ensemble W de V tel que $e \cap W \neq \emptyset$ pour toute arete e de G. On remarque que pour tout $U \subseteq V$:

U est un ensemble stable si et seulement si $V \setminus U$ est une couverture par sommet.

Un couplage est appelé couplage parfait s'il couvre tous les sommets ($|V|/2$ sommets). Une couverture par arete est un sous ensemble F de E tel que pour chaque sommet v il existe e dans F tel que $v \in e$. On remarque qu'une telle couverture n'est possible que si G n'a pas de sommet isolé.

On défini :

— $\alpha(G) = \{\max |C|$ tel que C est un ensemble stable$\}$,

— $\tau(G) = \{\min |W|$ tel que W est une couverture par sommet$\}$,

— $\mu(G) = \{\max |M|$ tel que M est un couplage$\}$,

— $\rho(G) = \{\min |F|$ tel que F est une couverture par arete$\}$.

Correction 1.

vertex	parity	root	pred
1	even	1	∅
2	even	2	∅
3	even	3	∅
4	even	4	∅
5	even	5	∅
6	even	6	∅
7	even	7	∅
8	even	8	∅
9	even	9	∅
10	even	10	∅
11	even	11	∅
12	even	12	∅

TABLE 1 – Première étape $M = \emptyset$, liste des aretes à examiner : $\{1-2; 2-3; 3-4; 3-7; 4-5; 5-6; 6-7; 5-8; 8-9; 8-12; 9-10; 10-11; 11-12\}$, on examine 1-2, 1 est pair et 2 aussi alors on applique le second item, comme $root(1) \neq root(2)$ on a trouvé un chemin augmentant : $1-2$ alors $M = \{1-2\}$

.

vertex	parity	root	pred
1	even	3	2
2	odd	3	3
3	even	3	∅
4	even	4	∅
5	even	5	∅
6	even	6	∅
7	even	7	∅
8	even	8	∅
9	even	9	∅
10	even	10	∅
11	even	11	∅
12	even	12	∅

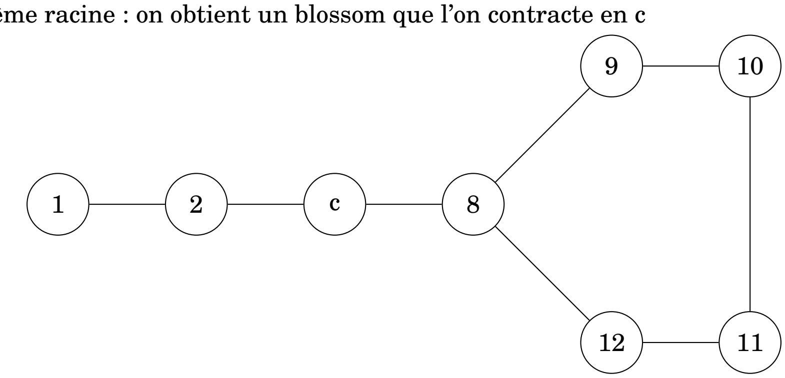
TABLE 2 – $M = \{1-2\}$, liste des aretes à examiner : $\{2-3; 3-4; 3-7; 4-5; 5-6; 6-7; 5-8; 8-9; 8-12; 9-10; 10-11; 11-12\}$, on examine 3-2 3 est pair et 2 est non marqué, alors on applique le premier item : on marque 2 impair, 1 pair et on rajoute 1-2 à examiner. On examine 3-4, tous deux pairs et de racine différente : on a trouvé au chemin augmentant : $M = \{1-2; 3-4\}$.

vertex	parity	root	pred
1			
2	even	7	3
3	odd	7	7
4	even	7	3
5	even	5	∅
6	even	6	∅
7	even	7	∅
8	even	8	∅
9	even	9	∅
10	even	10	∅
11	even	11	∅
12	even	12	∅

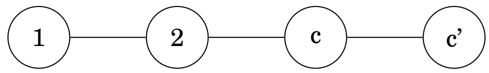
TABLE 3 – $M = \{1-2;3-4\}$, liste des aretes à examiner : $\{3-7;4-5;5-6;6-7;5-8;8-9;8-12;9-10;10-11;11-12\}$, on examine 3-7 7 est pair et 3 est non marqué, alors on applique le premier item : on marque 3 impair, 2 et 4 pair et on rajoute 1-2,2-3 et 3-4 à examiner. On examine 4-5, tous deux pairs et de racine différente : on a trouvé au chemin augmentant : $M = \{1-2;3-7,4-5\}$.

vertex	parity	root	pred
1			
2			
3	even	6	7
4	even	6	5
5	odd	6	6
6	even	6	∅
7	odd	6	∅
8	even	8	∅
9	even	9	∅
10	even	10	∅
11	even	11	∅
12	even	12	∅

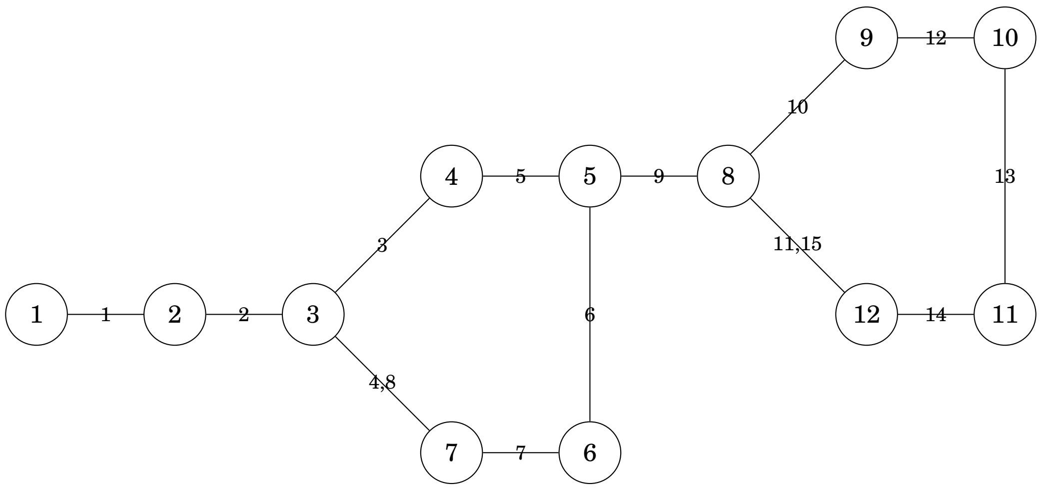
TABLE 4 – $M = \{1-2;3-7,4-5\}$, liste des aretes à examiner : $\{5-6;6-7;5-8;8-9;8-12;9-10;10-11;11-12\}$, on examine 6-5 6 est pair et 5 est non marqué, alors on applique le premier item : on marque 5 impair,4 pair et on rajoute 3-4 et 4-5 à examiner. On examine 6-7, 7 impair, 3 pair : on ajoute 3-7. En examinant 3-4 tous deux pairs et de même racine : on obtient un blossom que l'on contracte en c



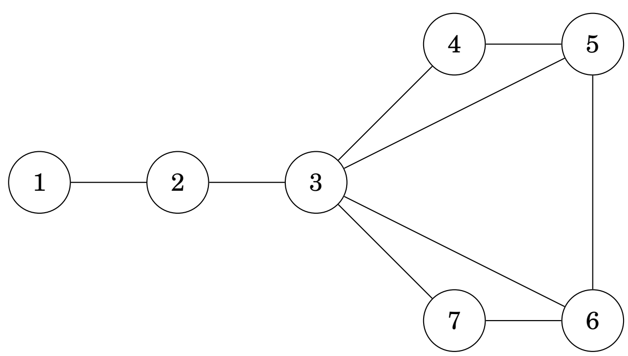
A partir de ce nouveau graphe on obtient le matching $\{1-2; c-8\}$, jusqu'à $\{1-2; c-8; 9-10; 11-12\}$ jusqu'à trouver le second blossom. On contracte et obtient :



En décontractant, le matching $\{1-2; c-c'\}$ devient $M = \{1-2; 3-4; 6-7; 5-8; 9-10; 11-12\}$
En résumé les étapes sont (de 1 à 15 sur les aretes) :



1. Quelle sont ces quantités pour le graphe ci dessous ?



2. Montrer que $\alpha(G) \leq \rho(G)$ et $\mu(G) \leq \tau(G)$.
3. Prouver le théorème de Gallai : si $G = (V, E)$ est un graphe sans sommet isolé, alors $\alpha(G) + \tau(G) = |V| = \mu(G) + \rho(G)$.

Correction 2. *1.* — $\alpha(G) = \{\max |C|$ *tel que C est un ensemble stable*$\} = 3$, $\{2, 4, 7\}$

— $\tau(G) = \{\min |W|$ *tel que W est une couverture par sommet*$\} = 4$, $\{1, 3, 5, 6\}$,

— $\mu(G) = \{\max |M|$ *tel que M est un couplage*$\} = 3, \{2-3, 4-5, 6-7\}$

— $\rho(G) = \{\min |F|$ *tel que F est une couverture par arete* $= 4\}$, $\{1-2, 3-4, 5-6, 3-7\}$.

2. $\alpha(G) \leq \rho(G)$ *: comme une couverture par arete n'est possible que s'il n'y a pas de sommet isolé, pour tout sommet de C on peut trouver une arete ayant pour sommet incident un sommet de C et un sommet hors de C.*

$\mu(G) \leq \tau(G)$ Par definition du couplage chaque sommet a au plus une arete incidente d'où au moins un sommet incident à chaque arete d'un couplage doit être pris par la couverture (pour couvrir cette arete).

3. *La première égalité provient de la première remarque. Pour la seconde égalité, on suppose d'abord que M est un couplage de taille $\mu(G)$. Pour chacun des $|V|-2|M|$ sommets v non matchés par M, on ajoute à M une arete couvrant v. On obtient une couverture par arete F de taille $|M|+(|V|-2|M|)=|V|-|M|$. D'où $\rho(G) \leq |F| = |V|-|M| = |V|-\mu(G)$.*

   Ensuite, on suppose que F est une couverture par arete de taille $\rho(G)$. On choisit une arete de chaque composante connexe de (V,F), pour obtenir un couplage M. Comme (V,F) a au moins $|V|-|F|$ composantes, on a $\mu(G) \geq |M| \geq |V|-|F| = |V|-\rho(G)$.