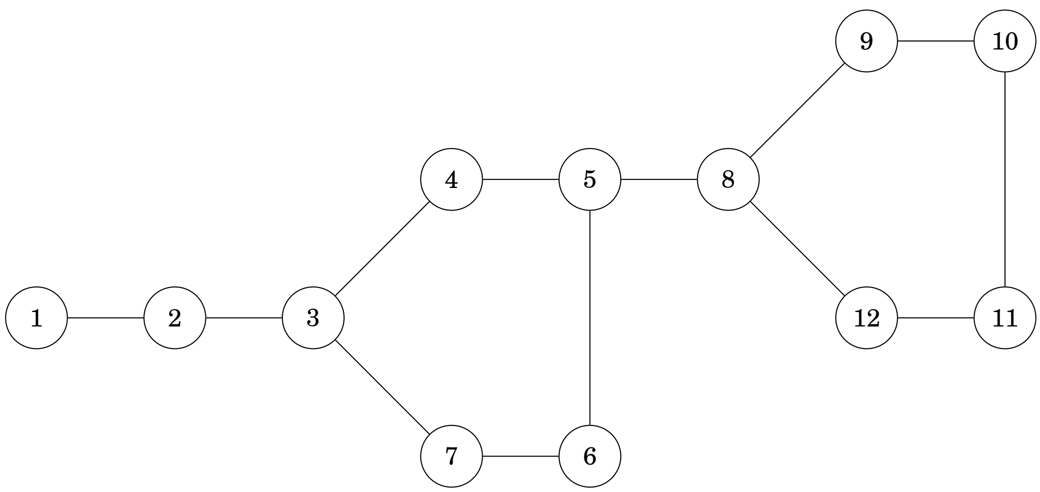
Optimisation convexe et combinatoire
TD 1

10 novembre 2016

Exercise 1 Application algorithme d'Edmonds pour les couplages



1. Appliquer l'algorithme d'Edmonds au graphe ci dessus.

Exercise 2 Théorème de Gallai

Soit $G = (V, E)$ un graphe. un ensemble stable est un sous ensemble C de V tel que $e \not\subseteq C$ pour toute arete e de G. Une couverture par sommet est un sous-ensemble W de V tel que $e \cap W \neq \emptyset$ pour toute arete e de G. On remarque que pour tout $U \subseteq V$:

U est un ensemble stable si et seulement si $V \setminus U$ est une couverture par sommet.

Un couplage est appelé couplage parfait s'il couvre tous les sommets ($|V|/2$ sommets). Une couverture par arete est un sous ensemble F de E tel que pour chaque sommet v il existe e dans F tel que $v \in e$. On remarque qu'une telle couverture n'est possible que si G n'a pas de sommet isolé.

On défini :

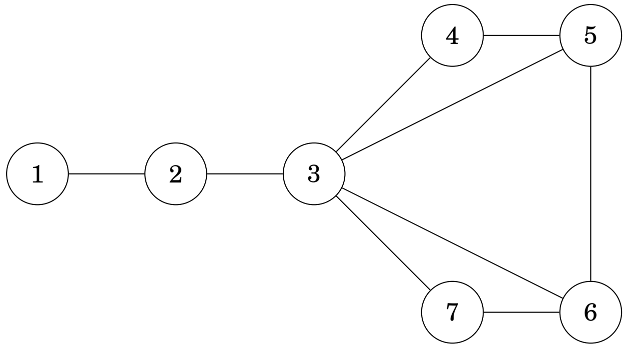
— $\alpha(G) = \{\max |C|$ tel que C est un ensemble stable$\}$,

— $\tau(G) = \{\min |W|$ tel que W est une couverture par sommet$\}$,

— $\mu(G) = \{\max |M|$ tel que M est un couplage$\}$,

— $\rho(G) = \{\min |F|$ tel que F est une couverture par arete$\}$.

1. Quelle sont ces quantités pour le graphe ci dessous ?



2. Montrer que $\alpha(G) \leq \rho(G)$ et $\mu(G) \leq \tau(G)$.
3. Prouver le théorème de Gallai : si $G = (V, E)$ est un graphe sans sommet isolé, alors $\alpha(G) + \tau(G) = |V| = \mu(G) + \rho(G)$.