Optimisation convexe et combinatoire
TD 2

24 novembre 2016

Exercice 1 Polytope entier et définitions équivalentes

Le but de cet exercice est de prouver l'équivalence de différentes définitions d'un polytope entier. On rappelle quelques définitions relatives au polytope avnt de pouver le théorème principal.

Definition 1. *Face de polytope*
Soit $P = \{x : Ax \leq b\}$, on appelle $F \subseteq P$ une face de P l'ensemble des points de P qui satisfait avec égalité un sous-ensemble fixe des inégalités.
Par exemple $F = \{x : A_1 x = b_1$ et $2 \leq i \leq k, A_i x \leq b_i\}$ est une face de P.

Definition 2. *Polytope entier*
Un polytope P est dit entier si toute face non vide de P contient un point entier.

Definition 3. *Point extrême et polytope pointé*
Un point $\bar{x} \in P$ est appelé point extrême de P si $\bar{x} = \lambda x + (1-\lambda) y$ pour deux points de P : x et y et $0 < \lambda < 1$ implique $x = y = \bar{x}$.
Un polytope P est dit pointé s'il contient au moins un point extrême.

Definition 4. *Enveloppe convexe d'un ensemble*
Soit S un ensemble, on note $conv(S)$ le plus petit ensemble convexe contenant S.

On prouve le théorème suivant :

Theorem 1. *Soit P un polytope rationnel pointé, les propositions suivantes sont équivalentes :*
i : P est un polytope entier,
ii : le problème PL : $\max\{c^\top x : x \in P\}$ a une solution entière optimale pour tout $c \in \mathbb{Q}^n$,
iii : le problème PL : $\max\{c^\top x : x \in P\}$ a une solution entière optimale pour tout $c \in \mathbb{Z}^n$,
iv : la valeur $z^{PL} = \max\{c^\top x : x \in P\}$ est entière pour tout $c \in \mathbb{Z}^n$,
v : $P = conv(P \cap \mathbb{Z}^n)$.

Lemme 1. *Soit P un polytope rationnel, et $\bar{x} \in P$ un point extrême de P, il existe un vecteur entier $c \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\bar{x}$ est l'unique solution optimale de $\max\{c^T x : x \in P\}$.*

1. Prouver le lemme,
   Correction :
   Soit P un polytope rationnel défini par $P = \{x : Ax \leq b\}$, on dénote I l'ensemble des indices des lignes de A tels que $A_i \bar{x} = b$. Soit $c = \sum_{i \in I} A_i$, on construit $\theta c = c' \in \mathbb{Z}^n$ un multiple de c, ce qui est possible car P est rationnel. Comme $\bar{x}$ est un point extrême, pour tout $x \in P, x \neq \bar{x}$ il existe un i tel que $A_i x < b_i$ et donc :

$$c'^T x = \theta \sum_{i \in I} A_i x < \theta \sum_{i \in I} b_i = c'^T \bar{x}$$

2. Montrer que $i \Rightarrow ii \Rightarrow iii \Rightarrow iv \Rightarrow i$,
   Correction :
   $i \to ii$: L'ensemble des solutions optimales du PL est une face de P *[clarification à venir]*, par définition du polytope entier chaque face contient un point entier d'où l'existence d'une solution entière.
   $ii \to iii$: iii sous-cas de ii.
   $iii \to iv$: Trivial.
   $iv \to i$: Par contradiction :
   Supposons i fausse, soit $\bar{x}$ un point extrême non entier, on note j une de ses coordonnées non entière, d'après le lemme précédent il existe un vecteur entier c' tel que $\bar{x}$ est l'unique solution optimale de $\max\{c'^T x : x \in P\}$. Comme $\bar{x}$ est l'unique solution optimale, on peut trouver $\omega \in \mathbb{N}$ assez grand tel que $\bar{x}$ est aussi optimal pour $\bar{c} = c' + \frac{1}{\omega} e_j$. Par construction $\bar{x}$ doit aussi être optimal pour $\bar{\bar{c}} = \omega \bar{c} = \omega c' + e_j$, ce qui donne :

$$\bar{\bar{c}}^T \bar{x} - \omega c'^T \bar{x} = (\omega c'^T \bar{x} + e_j^T \bar{x}) - \omega c'^T \bar{x} = e_j^T \bar{x} = \bar{x}_j$$

   De ce fait au moins l'une des deux valeurs $\bar{\bar{c}}^T \bar{x}$ ou $c'^T \bar{x}$ est non entière, ce qui contredit iv.
3. Montrer que $i \Rightarrow v$ et $v \Rightarrow iv$.
   Correction :
   $i \Rightarrow v$: Puisque P est convexe on a $conv(P \cap \mathbb{Z}^n) \subseteq P$. D'après la question précédente, tout point extrême de P est entier, avec la caractérisation $P = \{x = \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i : \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1\}$ où les x_i sont les points extrêmes d'où $P \subseteq conv(P \cap \mathbb{Z}^n)$.
   $v \Rightarrow iv$: Soit $c \in \mathbb{Z}^n$, comme par hypothèse $P = conv(P \cap \mathbb{Z}^n)$ le PL $\max\{c^T x : x \in P\}$ a une solution dans $P \cap \mathbb{Z}^n$ (si $x = \sum_i x_i \in conv(P \cap \mathbb{Z}^n)$ est combinaison de points de $P \cap \mathbb{Z}^n$, alors $c^T x \leq \max_i c^T x_i$). D'où le PL (avec solution bornée) a une valeur entière pour tout vecteur entier c, ce qui conclut la preuve.

Exercice 2 Polytope de couplage d'Edmond

1. Pour tout graphe à 3 arêtes, construire le polytope de couplage d'Edmond correspondant.