Optimisation convexe et combinatoire
TD 2

24 novembre 2016

Exercise 1 Polytope entier et définitions équivalentes

Le but de cet exercice est de prouver l'équivalence de différentes définitions d'un polytope entier. On rappelle quelques définitions relatives au polytope avnt de pouver le théorème principal.

Definition 1. *Face de polytope*

Soit $P = \{x : Ax \leq b\}$, on appelle $F \subseteq P$ une face de P l'ensemble des points de P qui satisfait avec égalité un sous-ensemble fixe des inégalités.

Par exemple $F = \{x : A_1 x = b_1$ et $2 \leq i \leq k, A_i x \leq b_i\}$ est une face de P.

Definition 2. *Polytope entier*

Un polytope P est dit entier si toute face non vide de P contient un point entier.

Definition 3. *Point extrême et polytope pointé*

Un point $\bar{x} \in P$ est appelé point extrême de P si $\bar{x} = \lambda x + (1-\lambda)y$ pour deux points de P : x et y et $0 < \lambda < 1$ implique $x = y = \bar{x}$.

Un polytope P est dit pointé s'il contient au moins un point extrême.

Definition 4. *Enveloppe convexe d'un ensemble*

Soit S un ensemble, on note $conv(S)$ le plus petit ensemble convexe contenant S.

On prouve le théorème suivant :

Theorem 1. *Soit P un polytope rationnel pointé, les propositions suivantes sont équivalentes :*

- *i : P est un polytope entier,*
- *ii : le problème PL : $\max\{c^\top x : x \in P\}$ a une solution entière optimale pour tout $c \in \mathbb{Q}^n$,*
- *iii : le problème PL : $\max\{c^\top x : x \in P\}$ a une solution entière optimale pour tout $c \in \mathbb{Z}^n$,*
- *iv : la valeur $z^{PL} = \max\{c^\top x : x \in P\}$ est entière pour tout $c \in \mathbb{Z}^n$,*
- *v : $P = conv(P \cap \mathbb{Z}^n)$.*

Lemme 1. *Soit P un polytope rationnel, et $\bar{x} \in P$ un point extrême de P, il existe un vecteur entier $c \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\bar{x}$ est l'unique solution optimale de $\max\{c^T x : x \in P\}$.*

1. Prouver le lemme,
2. Montrer que $i \Rightarrow ii \Rightarrow iii \Rightarrow iv \Rightarrow i$,
3. Montrer que $i \Rightarrow v$ et $v \Rightarrow iv$.

Exercise 2 Polytope de couplage d'Edmond

1. Pour tout graphe à 3 arêtes, construire le polytope de couplage d'Edmond correspondant.