Optimisation convexe et combinatoire
TD 4

8 décembre 2016

Exercice 1 T-joint et complexité

Le but de cet exercice est d'étudier la complexité asymptotique d'algorithmes liés au T-joint.

1. Prouver le théorème suivant.

   Théorème 1. *Quand les poids sont non négatifs la complexité du problème du T-joint de poids minimum est en* $O(n^3)$.

2. Prouver le théorème suivant.

   Théorème 2. *Soient* G *un graphe avec des poids* $c : E(G) \to \mathbb{R}$ *et* $T \subseteq V(G)$*,* $|T|$ *pair, un ensemble de sommet. Soient* E^- *l'ensemble des arêtes de poids négatif et* T^- *l'ensemble des sommets incidents à un nombre impair d'arêtes négatives, et soit* $d : (G) \to \mathbb{R}_+$ *défini par* $d(e) = |c(e)|$*, on a l'équivalence suivante :* J *est un T-joint de poids minimum avec les poids* c *si et seulement si* $J \triangle E^-$ *et un* $(T \triangle T^-)$ *joint de poids minimum selon les poids* d*.*

3. Quelle est la complexité du problème du T joint de poids minimum ?
4. Prouver le corollaire suivant.

   Corollaire 3. *La recherche d'une plus courte chaîne entre deux sommets donnés dans un graphe non-orienté, sans cycle négatif, peut se résoudre en* $O(n^3)$.

Exercice 2 Problème du voyageur du commerce et algorithme de l'ellipsoïde

Problème 1. *Voyageur du commerce*
Pour un graphe G *et un poids* c_e *pour chaque arête* $e \in E(G)$*, trouver un cycle contenant tous les sommets, de poids minimum.*

Définition 1. *Tour du voyageur du commerce*
Soit un graphe G *et un poids* c_e *pour chaque arête* $e \in E(G)$*, on appelle tour un cycle contenant tous les sommets.*

Soient $G = (V, E)$ un graphe non orienté avec des poids $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$, une variable x_e est associée à chaque arête e de G. On considère les équations suivantes :

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 \quad \forall v \in V,$$

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 \quad \forall S \subseteq V | \emptyset \neq S \neq V.$$

1. Montrer que les solutions avec les x_e dans $\{0, 1\}$ sont les tours du voyageur du commerce.
2. Transformer le problème du voyageur du commerce en PLNE. Combien de contraintes contient-il ?
3. Montrer comment résoudre la relaxation de ce PLNE à un PL en temps polynomial avec l'algorithme de l'ellipsoïde.