Optimisation convexe et combinatoire
TD 5

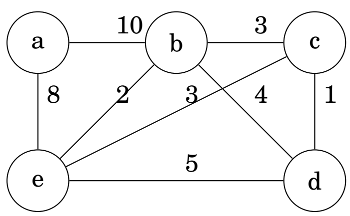
5 janvier 2017

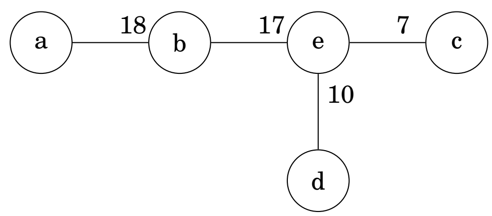
Exercice 1 Arbre de Gomory-Hu

Définition 1. *Valeur de coupe minimale*
Soit un graphe $G = (V;E)$ et un poids c_e pour chaque arête $e \in E(G)$, on définit $\alpha_G(u;v)$ comme la valeur de la coupe minimale entre u et v dans G.

Définition 2. *Arbre de Gomory-Hu*
Soient $G = (V;E)$, c et α_G, on appelle un arbre $T = (V(G);E(T))$ de Gomory-Hu pour G si pour tout $st \in E_T$ $\delta(W)$ est une coupe minimale dans G où W est une composante de $T - st$.

1. Montrer pour le graphe G et l'arbre suivants que l'arbre est un arbre de Gomory-Hu pour ce graphe.





Correction :

On vérifie que la coupe minimale pour $a-b$ est $\{a\},\{b,c,d,e\}$ de poids 18, celle pour $a-e$ (ou $b-e$) est $\{a,b\},\{c,d,e\}$ de poids 17. Pour tout $x \in \{a,b,d,e\}$ la coupe minimale de $c-x$ est $\{c\},\{a,b,d,e\}$ de poids 7 ; de manière similaire la coupe minimale de our tout $y \in \{a,b,c,e\}$ la coupe minimale de $d-y$ est $\{d\},\{a,b,c,e\}$ de poids 10.

2. Prouver le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit T un arbre de Gomory-Hu pour un graphe $G = (V;E)$. Alors, pour tous $u,v \in V$, soit st l'arête sur l'unique chemin de u à $v$tel que $\alpha_G(s,t)$ est minimisé on a :*

$$\alpha_G(u,v) = \alpha_G(s,t)$$

et la coupe $\delta(W)$ induite par $T-st$ est une $u-v$ coupe minimum dans G. De ce fait $\alpha_G(s,t) = \alpha_T(s,t)$ pour tout $s,t \in V$ où le poids d'une arête st dans T est égale à $\alpha_G(s,t)$.

Correction :
On note d'abord que α_G obéit à une inégalité triangulaire : $\alpha_G(a,b) \geq \min(\alpha_G(a,c), \alpha_G(b,c))$ pour tout graphe non orienté G et sommets a,b,c (On peut le voir en notant que c doit être d'un côté ou de l'autre pour chaque $a-b$ coupe).

On considère le chemin de u à v dans T ; si $uv = st$ alors $\alpha_G(u,v) = \alpha_G(s,t)$. Sinon, soit $w \neq v$ le voisin de u sur le chemin $u - v$ dans T. Par l'inégalité triangulaire, $\alpha_G(u,v) \geq \min(\alpha_G(u,w), \alpha_G(w,v))$. Si $uw = st$, alors $\alpha_G(u,v) \geq \alpha_G(s,t)$; sinon par induction sur la longueur du chemin, on a $\alpha_G(u,v) \geq \alpha_G(w,v) \geq \alpha_G(s,t)$.

Cependant, par définition d'arbre de Gomory-Hu, on a $\alpha_G(u,v) \leq \alpha_G(s,t)$ puisque la coupe induite par $T - st$ est une coupe valide pour u, v. De ce fait on a $\alpha_G(u,v) = \alpha_G(s,t)$ et la coupe induite par $T - st$ est une coupe minimale dans G.