Optimisation convexe et combinatoire
TD 5

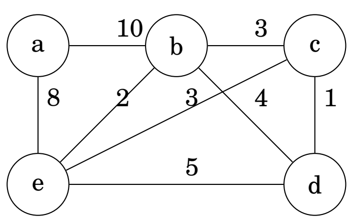
5 janvier 2017

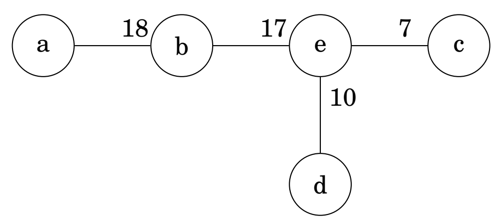
Exercice 1 Arbre de Gomory-Hu

Définition 1. *Valeur de coupe minimale*
Soit un graphe $G = (V;E)$ et un poids c_e pour chaque arête $e \in E(G)$, on définit $\alpha_G(u;v)$ comme la valeur de la coupe minimale entre u et v dans G.

Définition 2. *Arbre de Gomory-Hu*
Soient $G = (V;E)$, c et α_G, on appelle un arbre $T = (V(G);E(T))$ de Gomory-Hu pour G si pour tout $st \in E_T$ $\delta(W)$ est une coupe minimale dans G où W est une composante de $T - st$.

1. Montrer pour le graphe G et l'arbre suivants que l'arbre est un arbre de Gomory-Hu pour ce graphe.





2. Prouver le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit T un arbre de Gomory-Hu pour un graphe $G = (V;E)$. Alors, pour tous $u,v \in V$, soit st l'arête sur l'unique chemin de u à v tel que $\alpha_G(s,t)$ est minimisé on a :*

$$\alpha_G(u,v) = \alpha_G(s,t)$$

et la coupe $\delta(W)$ induite par $T - st$ est une $u - v$ coupe minimum dans G. De ce fait $\alpha_G(s,t) = \alpha_T(s,t)$ pour tout $s,t \in V$ où le poids d'une arête st dans T est égale à $\alpha_G(s,t)$.